Решение задач 11 класса 2018.

1. По закрепленной наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, соскальзывает с постоянной скоростью V брусок массой 2m. Сверху без начальной скорости отпускают кусок пластилина массой m. Пролетев расстояние H, пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось за время соударения? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Решение.

В данной системе сохраняется горизонтальная составляющая импульса, поскольку в данном направлении внешние силы не действуют. Тогда $2mV\cos\alpha = 3mu\cos\alpha$, где u скорость бруска с пластилином. Откуда получаем: $u = 2V/3$.

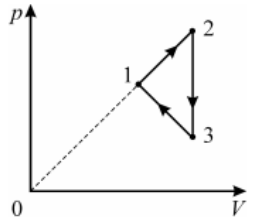
Теперь запишем закон сохранения энергии с учетом потерь на тепло:

$$mgH + 2m\frac{V^2}{2} = 3m\frac{1}{2}\left(\frac{2V}{3}\right)^2 + Q.$$

Откуда и получаем искомое количество теплоты

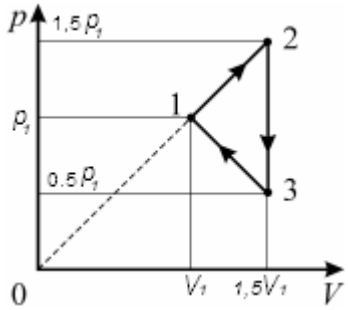
$$Q = mgH + \frac{mV^2}{3}.$$

2. С одним молем идеального одноатомного газа осуществляется цикл, график которого приведен на pV-диаграмме. Температуры газа в состояниях 1, 2 и 3 равны $T_1 = 4T_0$, $T_2 = 9T_0$ и $T_3 = 3T_0$ соответственно. Определить работу, совершаемую газом за один цикл?



Решение.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для состояний 1, 2 и 3. $P_1V_1 = 4RT_0$, $P_2V_2 = 9RT_0$ и $P_3V_3 = 3RT_0$. Учтем, что состояния 1 и 2 расположены на прямой, которая проходит через начало координат, т.е. $P_2/V_2 = P_1/V_1$ и то, что процесс 2-3 изохорический, $V_2 = V_3$. Из пяти полученных соотношений выразим давления и объем в состояниях 2 и 3 через соответствующие параметры состояния 1. Результат приведен на рисунке.

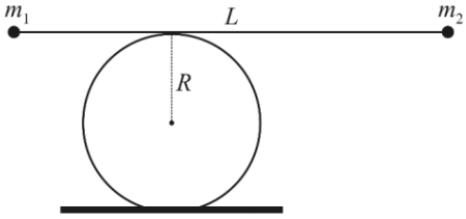


Работу, совершаемую газом за один цикл, численно определяем как площадь ограниченную циклом на pV-диаграмме. Площадь треугольника 123 вычислим через разность площадей трапеций:

$$A = \frac{p_1 + 1{,}5p_1}{2}\cdot\frac{1{,}5V_1 - V_1}{2} - \frac{p_1 + 0{,}5p_1}{2}\cdot\frac{1{,}5V_1 - V_1}{2} = \frac{1}{4}P_1V_1 = RT_0.$$

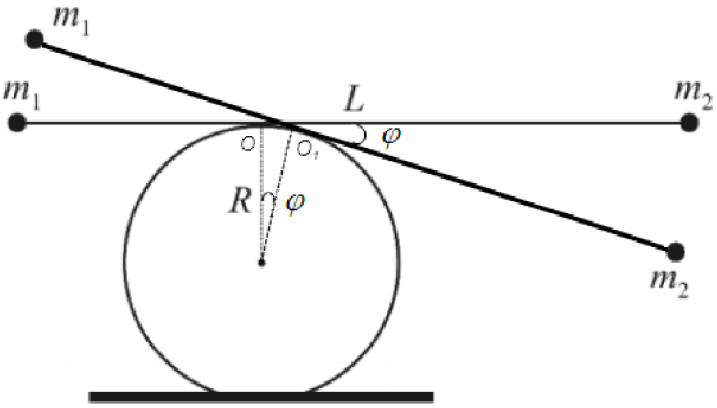
3. Система состоит из тонкого невесомого стержня длиной L на концах которого закреплены два маленьких шарика массами m_1 и m_2. Стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закрепленного цилиндра радиусом R. В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (см. рис.). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и

отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Определите частоту возникших колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



Решение.

Данную задачу можно решить двумя способами: динамически и энергетически. Рассмотрим первый способ. Определим сначала длины плеч стержня от грузиков до точки опоры. Из равенства моментов легко определить, что $L_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}L$ и $L_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}L$. Пусть стержень повернулся на некоторый малый угол φ (см. рис.).



Расстояния от грузиков до новой точки опоры O_1 изменились на величину $R\varphi$ и стали равными $L_1' = L_1 + R\varphi$ и $L_2' = L_2 - R\varphi$. Запишем теперь 2й закон Ньютона для вращательного движения: $m_1 g L_1' \cos\varphi - m_2 g L_2' \cos\varphi = -\left(m_1 L_1'^2 + m_2 L_2'^2\right)\ddot{\varphi}$. Подставим $L_1' = L_1 + R\varphi$ и $L_2' = L_2 - R\varphi$ и учтем малость угла φ (оставим только слагаемые 1й степени от φ). Также учтем, что $\cos\varphi \approx 1$.

$$m_1 g\left(L_1 + R\varphi\right)\cos\varphi - m_2 g\left(L_2 - R\varphi\right)\cos\varphi = -\left(m_1\left(L_1 + R\varphi\right)^2 + m_2\left(L_2 - R\varphi\right)^2\right)\ddot{\varphi},$$

$$m_1 g R\varphi - m_2 g\left(-R\varphi\right) = -\left(m_1 L_1^{\,2} + m_2 L_2^{\,2}\right)\ddot{\varphi}.$$

Подставим $L_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}L$ и $L_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}L$:

$$\left(m_1+m_2\right)gR\varphi = -\left(m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}L\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}L\right)^2\right)\ddot{\varphi} = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}L^2\ddot{\varphi}.$$

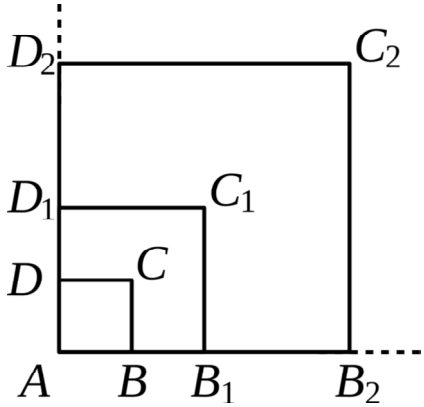
Перенесем слагаемые в одну сторону и запишем уравнение в виде $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, где ω и есть искомая частота колебаний.

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}L^2\ddot{\varphi} + \left(m_1+m_2\right)gR\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(m_1+m_2\right)^2}{m_1 m_2}\frac{gR}{L^2}\varphi = 0.$$

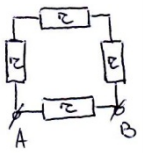
Откуда получается частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{\left(m_1+m_2\right)^2}{m_1 m_2}\frac{gR}{L^2}}$.

4. Из проволоки собрана электрическая схема (см. рис.), которая представляет собой вложенные квадраты, причем сторона каждого нового квадрата в два раза больше, чем у предыдущего (т.е. $AB_1 = 2AB$, $AB_2 = 4AB$, $AB_3 = 8AB$ и т.д.) Сопротивление одного квадрата ABCD между точками A и B равно R_0. Определите, чему равно сопротивление получившейся схемы между точками A и B в случае, когда схема состоит из очень большого количества квадратов? Проволока однородная и имеет постоянное поперечное сечение.



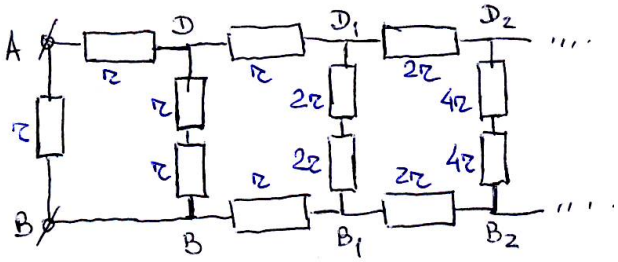
Решение.

Обозначим сопротивление стороны AB самого маленького квадрата через r. Тогда в первом случае, когда подключен только один квадрат ABCD имеем:

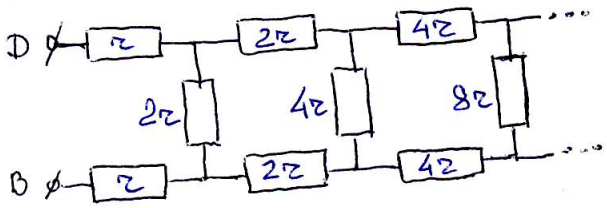


$$\left.\begin{aligned} R_{AB} &= R_0 \\ R_{AB} &= \frac{r \cdot 3r}{r + 3r} = \frac{3}{4} r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4} r = R_0, \quad \textit{Тогда} \quad r = \frac{4}{3} R_0.$$

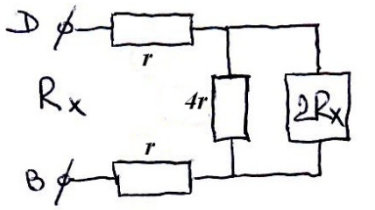
Нарисуем теперь эквивалентную схему в случае очень большого количества квадратов.



Из рисунка видно, что схема состоит из звена ABBCD и подключенной к точкам B и D «стандартной» бесконечной схемы, следующего вида:

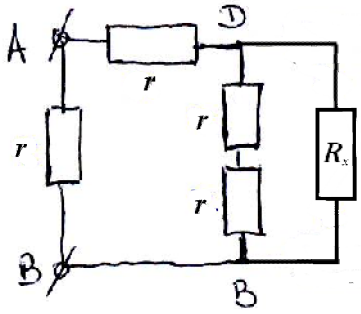


Поскольку номиналы сопротивлений в каждом последующем звене вдвое больше предыдущих, то отбрасывание первого звена приведет к удвоению итогового сопротивления, т.е.



Тогда получаем уравнение: $r+\dfrac{2R_x\cdot 4r}{2R_x+4r}+r=R_x$, откуда для R_x получается квадратное уравнение $R_x^2-4rR_x-4r^2=0$. Решая которое получаем $R_x=\dfrac{4r\pm\sqrt{32}r}{2}$, отбрасывая нефизическое отрицательное решение имеем: $R_x=2r\left(1+\sqrt{2}\right)$.

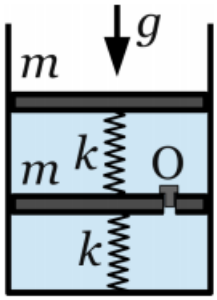
Теперь мы можем заменить в первоначальной схеме бесконечный «хвост», подключенный к точкам B и D на сопротивление R_x.



Тогда вычисление дает: $R_{AB}=\dfrac{r\cdot\left(r+\dfrac{R_x\cdot 2r}{R_x+2r}\right)}{r+r+\dfrac{R_x\cdot 2r}{R_x+2r}}=\dfrac{r\left(2r+3R_x\right)}{2\left(2r+2R_x\right)}$.

Подставим R_x и получим: $R_{AB}=\dfrac{r\left(2r+6r\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{2\left(2r+4r\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}=\dfrac{r\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}r}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R_0$.

5. В сосуде расположены два поршня массой m и две пружины жесткостью k. Одна пружина соединяет поршни между собой, другая – нижний поршень и дно сосуда (см. рис.). Пространство под поршнями заполнено идеальным газом, система находится в равновесии, при этом обе пружины недеформированы и имеют длину L. В нижнем поршне открыли небольшое сквозное отверстие O. На какой высоте расположатся поршни, когда в системе снова установится равновесие? Считать, что температура в конце устанавливается равной первоначальной. Атмосферным давлением, весом газа и трением пренебречь. Ускорение свободного падения g.



Решение.

По условию пружины вначале недеформированы, поэтому они не действуют на поршни. Это значит, что в начальный момент вес поршней уравновешен только силами давления газа. Из условия равновесия верхнего поршня получаем, что давление газа под ним (в верхнем отсеке) равно $p_0 = mg/S$, где S – площадь поршня. На нижний поршень сверху действует сила давления газа из верхнего отсека $p_0S = mg$, а снизу – сила давления газа нижнего отсека. Так как разность этих сил уравновешивает вес нижнего поршня mg, значит сила давления в нижнем отсеке равна 2mg. Поэтому давление газа в нижнем отсеке первоначально равно $2p_0$.

Обозначим давление газа в обоих отсеках после установления равновесия через p. Предположим, после установления равновесия верхняя пружины сожмется на x_1, а нижняя – на x_2. Если на самом деле какая-то пружина не сожмется, а наоборот растянется, это будет соответствовать отрицательному

значению x_1 или x_2. С помощью введенных обозначений несложно выразить конечные объёмы отсеков с газом, $V_1 = (L - x_1)S$ и $V_2 = (L - x_2)S$.

Запишем с помощью уравнения Менделеева-Клайперона количество вещества в отсеках в начале, ν_1 и ν_2, а именно, $\nu_1 = p_0LS/(RT)$, $\nu_2 = 2p_0LS/(RT)$. Суммарное количество вещества $\nu_1 + \nu_2 = 3p_0LS/(RT)$ в конце находится при давлении p в объёме $V_1 + V_2$, а температура T по условию не изменилась, поэтому $\nu_1 + \nu_2 = p(V_1 + V_2)\ RT \Rightarrow 3\ mg\ L/S = p(2L - x_1 - x_2)$.

В конце, после установления равновесия, силы, действующие на каждый поршень, снова скомпенсированы. Для верхнего поршня это теперь условие $mg = pS + kx_1$. Нижний же поршень в конце испытывает равное давление газа p сверху и снизу, поэтому вес его скомпенсирован разницей сил натяжения пружин: $mg + kx_1 = kx_2$.

Разрешим полученную систему уравнений. Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным параметрам, введя относительное сжатие пружин $\alpha_{1,2} = x_{1,2}/L$ и параметр $a = mg/(kL)$. Система принимает вид

$$3a = \frac{pS}{kL}(2 - \alpha_1 - \alpha_2),$$

$$a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1,$$

$$a + \alpha_1 = \alpha_2.$$

Исключим из системы величины $\frac{pS}{kL}$, α_2 и получим квадратное уравнение на α_1:

$$2\alpha_1^2 - (a + 2)\alpha_1 - a(a + 1) = 0.$$

Находим два решения для верхней пружины: $\alpha_1 = (a + 2 \pm (3a + 2))/4$. Заметим, что если взять «решение с плюсом», получится $\alpha_1 = 1+a$. Поскольку $a>0$, а относительное сжатие α_1 не может превышать 1 (также как обычное сжатие x_1 не может превысить длину недеформированной пружины L), то данное решение нефизично. Решение же «с минусом» даёт вполне физический ответ $\alpha_1 = -a/2$, $\alpha_2 = a/2$.

Итак, казалось бы решение найдено: верхняя пружина растянется на $x_1 = L\alpha = mg/(2k)$, а нижняя настолько же сожмётся. Однако, следует учесть, что относительное сжатие второй пружины $\alpha_2 = a/2$ также не должно превышать 1, поэтому построенное решение нефизично при $a > 2$.

В этом случае нижний поршень просто лежит на дне сосуда, так как жёсткости пружин не хватает, чтобы удержать его на весу. Уравнение $mg + kx_1 = kx_2$ теперь не выполняется и вместо него следует взять $x_2 = L$ (или $\alpha_2 = 1$). Получим новую систему уравнений:

$$3a = \frac{pS}{kL}(1 - \alpha_1),\ a = \frac{pS}{kL} + \alpha_1.$$

Решая аналогично, получаем квадратное уравнение $\alpha_1^2 - (a + 1)\alpha_1 - 2a = 0$. Откуда получаем для $\alpha_1 = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 + 8a}}{2}$. Решение «с плюсом» снова следует отбросить, поскольку оно заведомо больше единицы. Верхний поршень при этом будет находиться над дном на расстоянии $L - L\alpha_1$.