Решение задач 10 класса 2018.

1. Обмерзшая равномерно тонким слоем льда проволока с удельным электрическим сопротивлением ρ, длиной l и диаметром d, подключена к источнику постоянного тока с известным напряжением U. За какое время растает весь лёд, если его масса m, температура 0°C и удельная теплота плавления λ?

Решение

Найдем общее сопротивление проволоки:

$$R = \rho \frac{l}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2}$$

Тогда мощность нагревательной системы, исходя из закона Джоуля-Ленца равна:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi d^2 U^2}{4\rho l}$$

Энергия, которую нужно передать льду, чтоб он расплавился находиться по формуле:

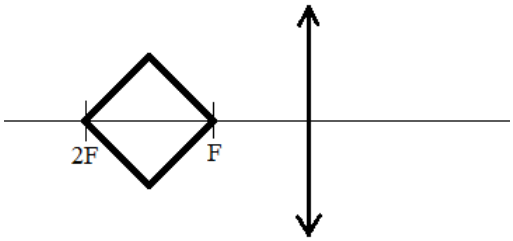
$$Q = m\lambda$$

Поскольку лёд обмерз вокруг проволоки равномерно тогда вся энергия, выделенная на проводе, перейдет в энергию плавления льда. Тогда время за которое растает лед будет равно:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{4\rho l m\lambda}{\pi d^2 U^2}$$

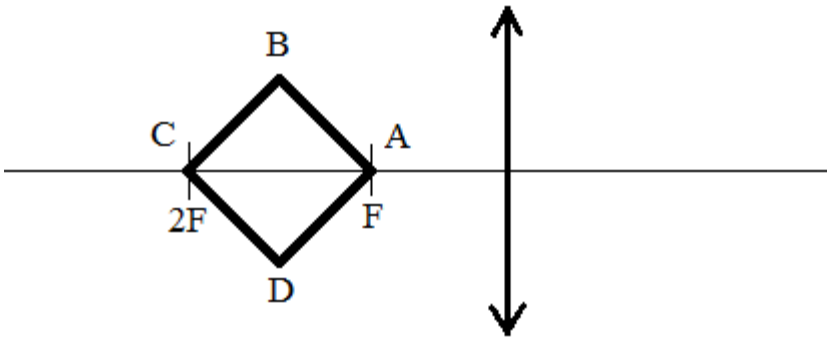
Ответ: $t = \frac{4\rho l m\lambda}{\pi d^2 U^2}$.

2. Найти изображение светящейся полоски свернутой в виде квадрата, одна вершина которого проходит через фокус, а противоположная ей вершина через двойной фокус собирающей линзы (как это показано на рисунке).

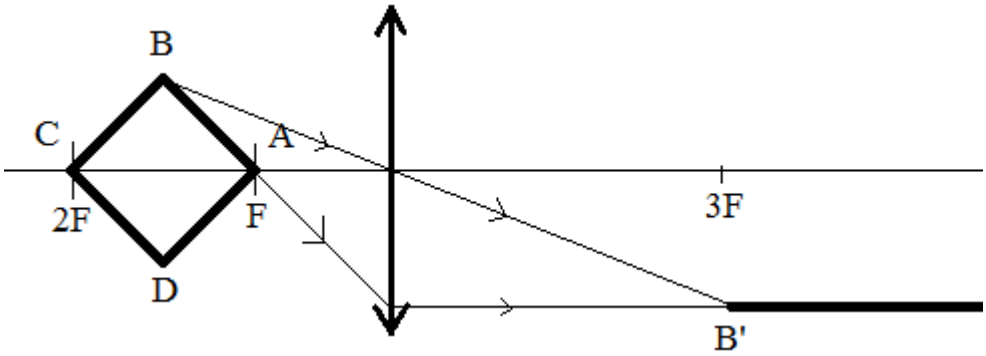


Решение

Обозначим точки как показано на рисунке:



Найдем изображение отрезка AB:



Точка A уйдет на бесконечность

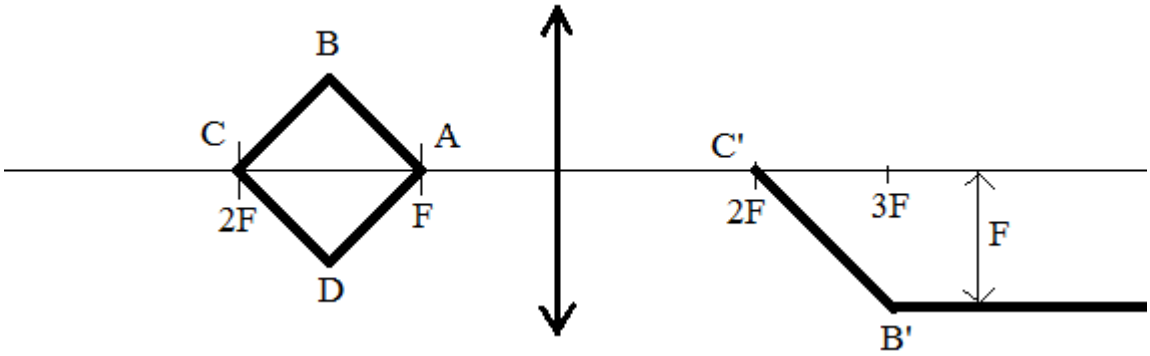
Точка B на расстоянии 3F так как:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{1.5F} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = 3F$$

И так как расстояние до предмета (1.5F) в два раза меньше расстояния до изображения (3F) тогда точка B′ находиться на в два раза большем расстоянии от главной оптической оси чем точка B.

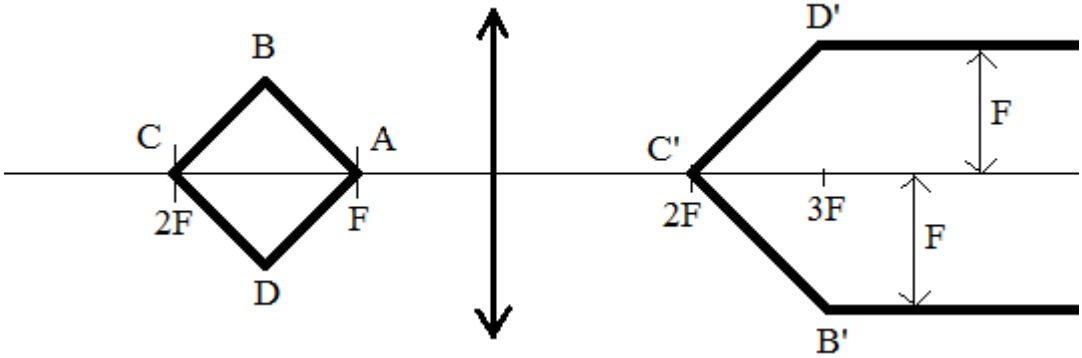
Найдем изображение точки C:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = 2F$$



Чтоб получить изображения отрезков AD и DC нужно отразить изображения отрезков AB и BC относительно главной оптической оси.

Получим итоговое изображение:



3. На льду лежат две одинаковые шайбы на расстоянии x. Коэффициент трения шайбы о лёд равен μ. Одна шайба лежала неподвижно, а вторую запустили со скоростью v в направлении первой. После столкновения первая шайба переместилась на расстояние l. Найти расстояние между шайбами после их полной остановки, если столкновение было абсолютно упругим и не лобовым.

Решение

Когда шайба движется, на неё действует сила трения численно равная μmg.

Кинетическая энергия шайбы во время движения переходит в работу силы трения. Пусть u – скорость шайбы в момент до удара. Тогда:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \mu mgx \Rightarrow u = \sqrt{v^2 - 2\mu gx}$$

Пусть после удара вторая шайба имела скорость $\vec{w}$, а первая $\vec{s}$. Тогда из законов сохранения импульса и энергии получим следующую систему:

$$\begin{cases} m\vec{u} = m\vec{w} + m\vec{s} \\ \frac{mu^2}{2} = \frac{mw^2}{2} + \frac{ms^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{w} + \vec{s} \\ u^2 = w^2 + s^2 \end{cases}$$

Возведём первое уравнение в квадрат:

$$\begin{cases} u^2 = w^2 + 2\vec{w} \cdot \vec{s} + s^2 \\ u^2 = w^2 + s^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{s} = 0$$

Поскольку столкновение не лобовое тогда ни w ни s не равны нулю. Тогда шайбы разлетятся под прямым углом.

Если первая шайба после столкновения переместилась на расстояние l тогда из того что вся её кинетическая энергия перешла в работу силы трения, можем найти её скорость в момент после удара.

$$\frac{ms^2}{2} = \mu mgl \Rightarrow s = \sqrt{2\mu gl}$$

Зная что $u^2 = w^2 + s^2$ получим $w^2 = u^2 - 2\mu gl$.

Тогда вторая шайба сместилась на расстояние $y = \frac{w^2}{2\mu g} = \frac{u^2 - 2\mu gl}{2\mu g} = \frac{v^2 - 2\mu gx - 2\mu gl}{2\mu g} = \frac{v^2}{2\mu g} - x - l$.

Исходя из теоремы Пифагора находим ответ на вопрос задачи:

Расстояние между шайбами после их полной остановки будет равно:

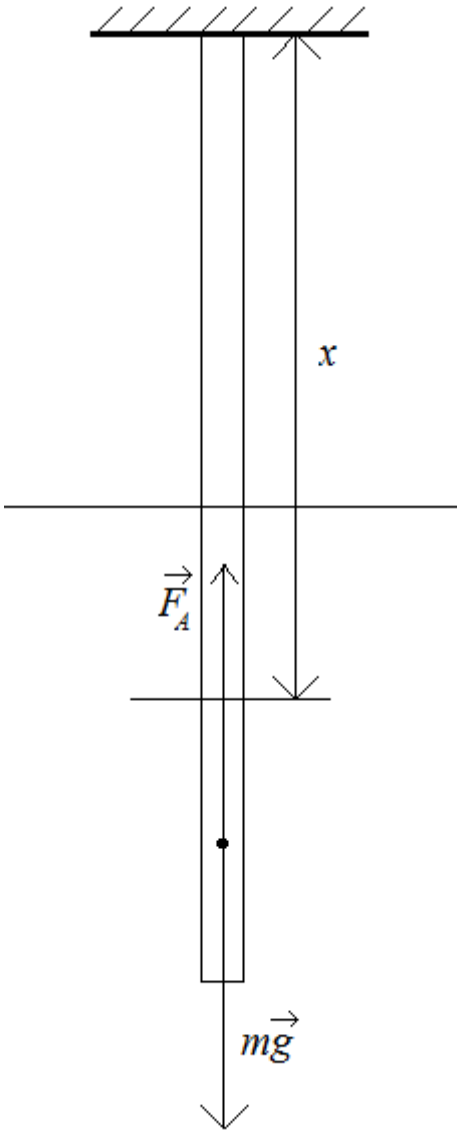
$$\sqrt{y^2 + l^2} = \sqrt{\frac{v^4}{4\mu^2 g^2} - \frac{v^2(x + l)}{\mu g} + (x + l)^2 + l^2}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{v^4}{4\mu^2 g^2} - \frac{v^2(x+l)}{\mu g} + (x+l)^2 + l^2}$.

4. Титановый стержень, известных размеров, наполовину погружен в ртуть. Верхний конец стержня жестко закреплен. Найти зависимость натяжения стержня как функцию расстояния до точки закрепления. Плотность титана $4500\ \text{кг/м}^3$, плотность ртути $13500\ \text{кг/м}^3$.

Решение

Пусть l – длина стержня, x – расстояние до точки закрепления.



На нижний конец стержня длиной $l - x$ действует сила тяжести $mg = S(l-x)\rho_{Ti}$ и сила гидростатического давления $F = \frac{Sl\rho_{Hg}}{2}$, где S – площадь сечения, ρ_{Hg} – плотность ртути, ρ_{Ti} – плотность титана.

Тогда $T(x) = S(l-x)\rho_{Ti} - \frac{Sl\rho_{Hg}}{2}$.

5. Система из двух звёзд одинаковой массы вращается в газовом облаке, по круговым орбитам. Найти во сколько раз изменится энергия системы, вызванная трением о газовое облако, если период вращения этих звёзд изменился в два раза.

Решение

Пусть расстояние между звездами R, масса каждой M.

Сила действующая на каждую из звезд $F = G\frac{M^2}{R^2}$.

Исходя из второго закона Ньютона, можно написать:

$$F = M\frac{v^2}{\frac{R}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{2R}}$$

$T = \frac{2\pi\frac{R}{2}}{v} = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$, где T – это период. (1)

Найдем общую энергию системы:

$$E = 2\left(-G\frac{M^2}{R} + \frac{1}{2}MG\frac{M}{2R}\right) = -\frac{3}{2}G\frac{M^2}{R} \quad (2)$$

В следствии трения энергия уменьшилась, значит радиус увеличился. А значит и увеличился период.

Как видно из формулы (1), если период увеличился в два раза, тогда радиус увеличился в $2^{\frac{2}{3}}$ раза. Тогда из формулы (2) следует что энергия уменьшилась в $2^{\frac{2}{3}}$ раза.